ریاضی گسسته

گزاره ها: جملات خبری هستند که می‌توان درست یا غلط بودن آن ها را بدون هیچگونه ابهامی از آن چه در خود جمله بیان شده تشخیص داد. ارزش یک گزاره مربوط به درستی یا نادرستی گزاره می باشد که گزاره درست را با T و نادرستی آن را با علامت F نمایش می دهند.

مثال: امروز هوا آفتابی است. T

- عدد $\sqrt{25}$ جزر کامل دارد. T
- در مریخ موجودات ذره بینی زندگی می کنند. F (هنوز فعلا تشخیص داد پس گزاره نیست)
- عدد 8 مربع کامل است. F (گزاره است اما نادرست است.)
- سعدی آدم خوبی است. F (جملاتی که نسبی و توصیفی هستند گزاره نیستند)

نفی یا نقیض یک گزاره: P اگر یک گزاره باشد، گزاره‌ای که P را اتفاق کند به آن نفی P گفته می شود و آن را به صورت $\sim P$ نمایش می دهند. اگر گزاره P درست باشد نقیض آن نادرست خواهد بود و بالعکس.

ترکیب عطفی (and): اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند گزاره مرکب حاصل از ترکیب عطفی دو گزاره را به صورت $p \wedge q$ نشان می دهند. و آن را [p و q] می خوانیم. ارزش گزاره $p \wedge q$ زمانی درست است که p و q هر دو درست باشند در غیر این صورت ارزش گزاره $p \wedge q = F$ است. که در جدول ارزش ها به صورت زیر داریم:

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

نکته: می توان ارزش گزاره $p \wedge q$ را نیز تشخیص داد که در ترکیب عطفی اولویت با F است. یکی از گزاره‌ها F باشد نتیجه F است.

Scanned by CamScanner

ترکیب فصلی گزاره ها (OR): اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند، ترکیب فصلی آن ها به صورت $p \vee q$ نوشته می شود که آن را p یا q می خوانیم. ارزش $p \vee q$ زمانی درست است که حداقل یکی از گزاره ها درست باشد در غیر این صورت پاسخ $p \vee q$ نادرست خواهد بود.

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

نکته: در گزاره $p \vee q$ اولویت با T است یعنی اگر یکی از آن ها T باشد ارزش ترکیب فصلی حاصل T می شود.

مثال: عدد ۴ فرد است (F) و عدد ۹ مربع کامل است (T). F

ترکیب شرطی گزاره ها: اگر دو گزاره p و q موجود باشند ترکیب شرطی آن ها به صورت $p \rightarrow q$ و آن را p آنگاه q می خوانیم. ارزش این گزاره اینگونه تعریف می شود که اگر (مقدم) p برابر T باشد و (تالی) q برابر با F باشد در این صورت نتیجه F خواهد بود. در غیر این صورت پاسخ T است که در جدول زیر ارزش حالت های مختلف را آورده ایم:

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

ترکیب دوشرطی: اگر p و q دو گزاره دلخواه باشند آنگاه ترکیب دوشرطی آن ها به صورت $p \leftrightarrow q$ خواهد بود که آن را [p اگر و فقط اگر q] [p شرط لازم و کافی برای q] می خوانیم و ارزش این گزاره اینگونه تعیین می شود که ارزش هر دو گزاره یکسان باشند ارزش ترکیب دو شرطی T خواهد بود در غیر این صورت F خواهد بود که آن را به صورت زیر داریم:

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

مثال: اگر 16 مربع کامل است، آنگاه $\sqrt{16}$ مربع کامل است. (F ، T) F

- جمع زوایای مثلث 180 درجه است اگر و فقط اگر زاویه های داخلی مثلث باشند. (T ، T) T

اولویت عملگرهای منطقی: عملگرهای منطقی نقیض (and، OR، تک شرطی و دو شرطی) در یک فرمول گزاره ای دارای اولویت اجرایی باشند. اولویت به ترتیب زیر است:

عملگر	اولویت
$\sim$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

گزاره های هم ارز (معادل): دو گزاره را هم ارز گویند هرگاه ارزش هر دو گزاره در تمام حالت ها یکسان باشند.
مثلاً دو گزاره p و q در صورت هم ارزی داریم: $p \equiv q$

Scanned by CamScanner

نکته ۹: اگر دو عبارت گزاره ای هم ارض باشند می توان برای هرکدام از آن ها در جدول ارزش ها برای تمام حالت های متغیرهای گزاره ای ارزش هر عبارت را بدست آورد اگر در تمام سطرها ارزش گزاره ای اول برابر ارزش گزاره ای دوم باشند در نتیجه دو گزاره هم ارض خواهند بود.

مثال: آیا رابطه ی هم ارزی زیر در گزاره ها برقرار است؟

$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

2 متغیر داریم پس 4 حالت خواهیم داشت

$\Leftarrow \quad 2^n = 2^2 = 4$

p	q	~p	~q	p∧q	~(p∧q)	~p∨~q
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

عین همن پس برقرار است.

فرمول گزاره ای Taut (همیشه راستگو): اگر فرمول گزاره ای مستقل از ارزش متغیرهای آن در تمام حالت ها دارای ارزش T باشد فرمول گزاره ای را همیشه درست گویند. ~~فرمول گزاره ای~~

فرمول گزاره ای Cont: اگر فرمول گزاره ای مستقل از ارزش متغیرهای آن در تمام حالت ها دارای ارزش F باشد فرمول گزاره ای را همیشه دروغ گویند.

مثال: نشان دهید که فرمول گزاره ای زیر Taut است؟

$\overbrace{p \wedge (q \vee r)}^{A} \longleftrightarrow \overbrace{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)}^{B}$

Scanned by CamScanner

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge r) \vee (p \wedge r)$	$A \longleftrightarrow B$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	T	T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F	F	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	F	F	F	F	F	T

Tout

★ فرمول های هم ارزی در گزاره های توان عبارت های مختلفی را در نظر گرفت که با یکدیگر معادل هستند که مهم ترین آن ها را به ترتیب معرفی می کنیم:

1) $\sim(\sim p) \equiv p$

2) $p \wedge p \equiv p$, $q \vee q \equiv q$ خودتوانی

3) $p \wedge \sim p \equiv q \wedge \sim q$, $p \vee \sim p \equiv q \vee \sim q$

✓ 4) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

5) $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

6) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$, $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ خاصیت شرکت پذیری

7) $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ خاصیت جابجایی

~~8) [illegible]~~

✓ 8) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$, $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ توزیع پذیری

9) $p \vee F \equiv p$, $p \wedge T \equiv p$ همانی

10) $p \vee T \equiv T$, $p \wedge F \equiv F$ عضو صفر

11) $p \vee \sim p \equiv T$, $p \wedge \sim p \equiv F$ مکمل

✓ 12) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$, $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ جذبی

✓ 13) $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$, $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ دمورگان

Scanned by CamScanner

مثال : نشان دهید فرمول های گزاره ای زیر هم ارض هستند؟ (با استفاده از فرمول های هم ارضی)

$\sim p \wedge (p \to q) \to \sim q \equiv q \to p$

↓ فرمول 4

$\sim p \wedge (\sim p \vee q) \to \sim q$

↓ 12

$\sim p \to \sim q$

↓ معکوس 5

$q \to p$

مثال : هم ارزی را در عبارت گزاره ای زیر بررسی کنید؟

$p \to (q \to r) \overset{?}{\equiv} (p \wedge q) \to R$

↓ 4

$p \to (\sim q \vee r)$

↓ 4

$\sim p \vee (\sim q \vee r)$

↓ 6

$(\sim p \vee \sim q) \vee r$

↓ عکس 13

$\sim (p \wedge q) \vee r$

↓ عکس 4

$p \vee q \to r$

Scanned by CamScanner

استقرای ریاضی: برای اینکه بتوانیم یک رابطه ریاضی را ثابت کنیم از استقرای ریاضی استفاده می کنیم که یکی از راه های اثبات روابطه که یک قاعده ی استنتاجی در اختیار قرار می دهد که به صورت زیر خواهد بود:

$$P(1),\ \forall K\,[P(K) \rightarrow P(K+1)] \vdash \forall_n\ P(n)$$

این عبارت به این معنی است که برای درستی $P(n)$ $\forall_n$ باید ثابت شود که ۱) $P(1)$ درست باشد. ۲) به ازای $K \geq 1$ مقدار $P(K+1)$ را نتیجه دهد.

می توان استقرای ریاضی را در ۳ مرحله انجام داد:

۱. مبنای استقرا که به ازای مقدار اولیه $n=1$ رابطه $P(n)$ برقرار باشد.

۲. فرض استقرا به ازای $K \geq 1$ ($n=1$) مقدار $P(K)$ درست باشد.

۳. با فرض صحیح بودن $P(K)$ به صحت $P(K+1)$ برسد.

مثال) با استفاده از استقرا نشان دهید مجموع n عدد فرد برابر n^2 است؟

مرحله اول:

$$P(n) = \sum_{i=1}^{n} 2i-1 = n^2$$

مبنای استقرا $\quad n=1 \longrightarrow P(1) = \sum_{i=1}^{1} 2i-1 = 1^2$

$2\times1-1=1^2$

پس درست است $\boxed{1=1}$

مرحله دوم:
فرض استقرا $\quad n=K \longrightarrow P(K) = \sum_{i=1}^{K} 2i-1 = K^2$

حکم استقرا $\quad n=K+1 \longrightarrow P(K+1) = \sum_{i=1}^{K+1} 2i-1 = (K+1)^2$

نکته: باید در حکم استقرا از طرف چپ تساوی به طرف راست تساوی با اثبات ریاضی بریم. در حین عملیات ریاضی سعی می کنیم جمله فرض استقرا را بسازیم.

اثبات: $\sum_{i=1}^{K+1} 2i-1 = \underbrace{\sum_{i=1}^{K} 2i-1}_{\text{از فرض می نویسیم}} + 2(K+1)-1$

$= K^2+2K+2-1$

$= K^2+2K+1$

$= (K+1)^2$

Scanned by CamScanner

مثال) با استفاده از استقرا ریاضی نشان دهید برای هر عدد صحیح مثبت رابطه‌ی زیر برقرار است؟

$$4+9+14+19+\dots = \frac{n(5n+3)}{2}$$

مبنای استقرا $n=1 \rightarrow$

$$P(1) = \sum_{i=1}^{1} 5i-1 = \frac{1(5\times1+3)}{2}$$

$$5\times1-1 = \frac{8}{2}$$

$\Rightarrow 4=4$ پس درست است.

فرض استقرا $n=k \longrightarrow P(k) = \sum_{i=1}^{k} 5i-1 = \frac{k(5k+3)}{2}$

حکم استقرا $n=k+1 \longrightarrow P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} 5i-1 = \frac{(k+1)(5(k+1)+3)}{2} = \frac{(k+1)(5k+8)}{2}$

اثبات:

$$P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} 5i-1 = \sum_{i=1}^{k} 5i-1 + 5(k+2)-1$$

$$= \frac{k(5k+3)}{2} + \frac{5(k+1)-1}{1} \longrightarrow 5k+4$$

$$= \frac{k(5k+3)+10k+8}{2} = \frac{5k^2+13k+8}{2}$$

$$= \frac{(5k+8)(k+1)}{2}$$

مثال) با استفاده از استقرا ریاضی نشان دهید برای هر عدد صحیح مثبت $n\geq1$ عدد $6^{n+2}+7^{2n+1}$ بر 43 بخش پذیر است.

Scanned by CamScanner

با عدد ۹ کاری نداریم بهش

مبنا: $n=1 \rightarrow 6^{1+2}+7^{2+1}=43Q$

$6^3+7^3=43Q$

$559=43Q$

درست است ← $\Rightarrow 43\times 13=43Q$

فرض:

$n=k \rightarrow P(k)=6^{k+2}+7^{2k+1}=43Q$

حکم: $n=k+1 \rightarrow P(k+1)=6^{k+3}+7^{2k+3}=43Q'$

اثبات: $6^{k+3}+7^{2k+3}=6\times 6^{k+2}+7^2\times 7^{2k+1}$

$=6\times 6^{k+2}+49\times 7^{2k+1}$

$=6\times 6^{k+2}+(6+43)\,7^{2k+1}$

$=6\times 6^{k+2}+6\times 7^{2k+1}+43\times 7^{2k+1}$

$=6\underbrace{(6^{k+2}+7^{2k+1})}_{\text{از فرض}}+43\times 7^{2k+1}$

$=6\times 43Q+43\times 7^{2k+1}$

$=43(6Q+7^{2k+1})$

$=\boxed{43Q'}$

مثال) نشان دهید برای هر عدد صحیح n عبارت $11^{n+2}+12^{2n+1}$ بر 133 بخش پذیر است؟

$P(n)=11^{n+2}+12^{2n+1}=133Q$

مبنا:

$n=1 \rightarrow p(1)=11^3+12^3=133Q$

$=1331+1728=133Q$

$=3059=133Q$

پس درست است ← $133\times 23=133Q$

فرض: $n = k \longrightarrow p(k) = 11^{k+2} + 12^{2k+1} = 133Q$

حكم: $n = k+1 \longrightarrow p(k+1) = 11^{k+3} + 12^{2k+3} = 133Q'$

اثبات:

$$11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \times 11^{k+2} + 12^{2} \times 12^{2k+1}$$

$$11 \times 11^{k+2} + 144 \times 12^{2k+1}$$

$$11 \times 11^{k+2} + (11+133)12^{2k+1}$$

$$11\underbrace{(11^{k+2} + 12^{2k+1})}_{\text{فرض}} + 133 \times 12^{2k+1}$$

$$11 \times 133Q + 133 \times 12^{2k+1}$$

$$133(11Q + 12^{2k+1})$$

$$= 133Q'$$

Scanned by CamScanner

Subject

Date. Month. Year.

فصل ۲

نظریه‌ی مجموعه‌ها و رابطه‌ها

مجموعه‌ی معین: مجموعه‌ی x را معین گویند برای هر عضو دلخواه مانند

بتوان تشخیص داد که آیا عضوه متعلق به مجموعه‌ی x می‌باشد یا خیر.

زیر مجموعه

اگر هر عضو A عضوی از B باشد آنگاه گوییم A زیر مجموعه B است و آن را

به صورت $A \subseteq B$ نمایش می‌دهیم و دستور ریاضی آن به صورت زیر است

$$A \subseteq B \iff (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

خواص رابطه‌ها

رابطه‌ی R روی مجموعه x را بازتابی گویند هرگاه هر عضو با خودش در آن

رابطه صادق باشد.

زیر مجموعه دارای خاصیت بازتابی است. بازتابی دارد $A \subseteq A$ ✓

SANA $A \subseteq B \rightarrow B \subseteq A$ ✗ تقارن ندارد

$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$ ✓ تعدی دارد

Scanned by CamScanner

Subject
Date. Month. Year.

ستون n عدد صفر را درج می‌کنیم اگر ماتریس رابطه را بصورت زیر در نظر بگیریم

که r_{ij} درایه‌های آن ماتریس باشند آن را به صورت زیر معرفی کرد

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & x_i R y_j \\ 0 & x_i \not R y_j \end{cases}$$

مثال: اگر مجموعه $X = \{1, 2, 3, 4\}$ و $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ماتریس R را تشکیل دهید.

$R = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in X, y \in Y, x$ کوچکتر از $y \}$

$R = \{ (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5) \}$

	1	2	3	4	5
1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	1

SANA

Subject
Date. Month. Year.

خواص رابطه‌ها

- رابطه‌ی R روی مجموعه X را بازتابی گویند اگر برای هر x عضو X داشته باشیم xRx به عنوان مثال $\subseteq$ و $\geq$ و $\leq$ خاصیت بازتابی دارند

- رابطه‌ی R روی مجموعه X را متقارن گویند هرگاه برای هر x و y متعلق به X اگر xRy برقرار باشد آنگاه yRx نیز برقرار باشد مثل $\cup$ و $\cap$

- رابطه‌ی R روی مجموعه X را متعدی گویند هرگاه برای هر x و y و z متعلق به X اگر داشته باشیم xRy و yRz آنگاه xRz نیز برقرار است مثل $\subseteq$

Relation matrix

اگر مجموعه‌های $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ و $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ - یک رابطه‌ی R روی مجموعه‌های X و Y را می‌توان به وسیله یک ماتریس نمایش داد که سطرها و ستون‌ها به ترتیب با عضوهای مجموعه‌ی X و Y نام‌گذاری می‌شوند به طوری که اگر $x_i R y_j$ موجود باشد آنگاه در سطر x_i ستون y_j عدد یک را درج می‌کنیم و اگر x_i با y_j رابطه نداشته باشد در این صورت در سطر x_i

SANA

Scanned by CamScanner

$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid (x\in A)\wedge(y\in B)\}$

خاصیت بازتابی ندارد $A\times A=A$ ✗ تقارنی ندارد $A\times B=B\times A$ ✗

تعدی $(A\times B)\wedge(B\times C)\to A\times C$ ✗ ترکیب پذیری ندارد $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$ ✗

مثال: برای مجموعه‌های A و B به صورت زیر عبارات خواسته شده را بدست آورید.

$A=\{1,2,3,4,d,e\}$ $B=\{a,b,c,3,4,6\}$

الف) $A-B=\{1,2,d,e\}$

ب) $A\Delta B=\{1,2,d,e\}\cup\{a,b,c,6\}=\{1,2,d,e,a,b,c,6\}$

ج) $A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(1,3),\dots,(e,6)\}$

رابطه‌ی دودویی

فرض کنید X و Y دو مجموعه‌ی غیر تهی باشند، مجموعه دودویی R از X به Y

زیر مجموعه‌ای از $X\times Y$ می‌باشد که در آن $(x,y)\in R$ به صورت xRy

که در واقع x و y در رابطه با R می‌باشند.

به طور یک رابطه‌ی دودویی می‌گوئیم

xRy

Scanned by CamScanner

Subject
Date. Month. Year.

مکمل نسبی دو مجموعه

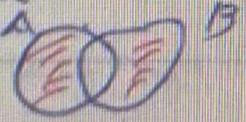
فرض کنید A و B دو مجموعه دلخواه باشند مجموعه‌ای از عضوهای A که به B متعلق نباشند را مکمل B نسبت به A گویند و به صورت A−B معرفی می‌شود و داریم

$A-B=\{x|(x\in A)\wedge(x\notin B)\}$

۲) تفاضل متقارن دو مجموعه

A و B اگر دو مجموعه باشند اجتماع مکمل نسبی A به B و مکمل نسبی B به A را تفاضل متقارن آن‌ها گویند و به صورت زیر معرفی می‌شود.

~~[illegible]~~ $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$



حاصل ضرب کارتزین

فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند مجموعه‌ای از تمام زوج‌های مرتب را که در آن مولفه اول متعلق به A و دومی متعلق به B باشد حاصل ضرب کارتزین A در B گویند و به صورت زیر تعریف می‌شود.

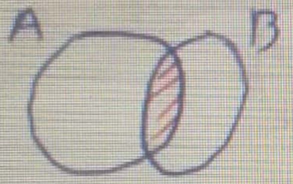
SANA

Scanned by CamScanner

الف) اشتراک دو مجموعه: فرض کنیم A و B دو مجموعه دلخواه باشند

مجموعه‌ای که عضوهای آن به هر دو مجموعه A و B متعلق باشند اشتراک A و B می

گویند و به صورت زیر نشان داده می‌شود. $A\cap B=\{x|(x\in A)\wedge(x\in B)\}$



خواص عمل اشتراک

خاصیت بازتابی دارد $A \subset A$

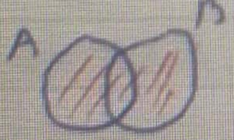
خاصیت تقارنی دارد - خاصیت تعدی ندارد

خاصیت شرکت‌پذیری را دارد $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

ب) اجتماع دو مجموعه: اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند مجموعه‌ای که عضوهای

آن به A یا B یا هر دو مجموعه A و B متعلق باشند را اجتماع دو مجموعه گویند و

به صورت زیر معرفی می‌شود. $A\cup B=\{x|(x\in A)\vee(x\in B)\}$



خاصیت بازتابی دارد. $A\cup A$ ✓

خاصیت تقارنی دارد ✓ - تعدی را دارا نیست ✗

SANA شرکت‌پذیری را دارد $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$

Scanned by CamScanner

زیرمجموعه سره

A زیرمجموعه سره B است اگر $A \neq B$ و $A \subseteq B$ که آن را به صورت

$(A \subseteq B) \wedge (A \neq B) \Leftrightarrow A \subset B$

خاصیت بازتابی ندارد $A \subset A$ ✗ تقارنی هم ندارد

خاصیت تعدی را دارد $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \longrightarrow A \subset C$

مجموعه‌ی توانی

اگر A یک مجموعه‌ی دلخواه باشد مجموعه‌ای از تمام زیرمجموعه‌های A را مجموعه توانی آن گویند و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهند اگر A شامل n عضو باشد A، 2^n عضو است.

مثال: مجموعه‌ی توانی مربوط به مجموعه A را تشکیل دهید.

$A = \{a, b, c\}$ تعداد اعضا $2^3 = 8$

$P(A) = \{\{\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

عملیات روی مجموعه‌ها

Scanned by CamScanner

خواص ماتریس رابطه:

۱- اگر رابطه‌ای بازتابی باشد آنگاه درایه‌های واقع در قطر اصلی ماتریس عدد ۱ خواهد بود.

$$R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

حتی اگر یکی از این عناصر قطر اصلی ۱ نباشد بازتابی نیست.

۲- اگر همه عناصر قطر اصلی ۰ باشد ماتریس غیربازتابی است.

۳- اگر درایه‌ها نسبت به قطر اصلی متقارن باشند در این صورت رابطه مربوط به این ماتریس متقارن خواهد بود.

$$R=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$ ⟵ نسبت به قطر اصلی یکی باشند

۴- اگر در ماتریس رابطه درایه‌ی $r_{ij}=1$ برای $i\neq j$ ، $r_{ji}=0$ باشد. یعنی درایه‌ها نسبت به قطر اصلی معکوس باشند.

$$R=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$$

۵- ماتریسی که عناصر آن فقط صفر و یک باشند را ماتریس بولی گویند.

عملیات روی ماتریس‌ها:

۱- $R \vee S$ (وست): اگر ماتریس دو رابطه R و S را به صورت زیر داشته باشد:

$R=[r_{ij}]_{m\times n}$

$S=[s_{ij}]_{m\times n}$

آنگاه وست آن دو ماتریس رابطه را به صورت $R\vee S$ نمایش می‌دهند که اگر درایه‌های آن ماتریس جدید به صورت

$[c_{ij}]_{m\times n}$ می‌توان عناصر آن را با دستور زیر تعیین کرد.

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 \rightarrow & \text{اگر } s_{ij}=1 \text{ یا } r_{ij}=1 \\ 0 \rightarrow & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

۲ـ زَشن (r and s) ($R \wedge S$): اگر دو ماتریس رابطه S و R به صورت زیر باشند:

$R = [r_{ij}]_{m\times n}$ $S[s_{ij}]_{m\times n}$

زشن دو ماتریس گفته شده به صورت $R \wedge S = [c_{ij}]_{m\times n}$ ی باشد که درایه های $[c_{ij}]$ به صورت زیر تعیین ی شود:

$$C_{ij} \begin{cases} 1 \rightarrow & \text{اگر } s_{ij}=1 \text{ و } r_{ij}=1 \\ 0 \rightarrow & \text{درغیر این صورت} \end{cases}$$

۳ـ حاصل ضرب بولی دو ماتریس: اگر ماتریس رابطه ی ۲ به صورت $R = [r_{ij}]_{m\times p}$ و $S[s_{ij}]_{p\times n}$ باشند و دو ماتریس بولی باشند، حاصلضرب بولی آن ها به صورت $R.S[c_{ij}]_{m\times n}$ نمایش داده می شود که عناصر آن را به صورت بالا باشد می توان درایه های $[c_{ij}]$ را با استفاده از دستور زیر تعیین کرد:

$$C_{ij} = \begin{cases} 1 \rightarrow & \text{اگر } (\exists K ، 1 \leq K \leq p) \text{ بطوریکه } a_{ik}=1 \text{ و } b_{kj}=1 \\ 0 \rightarrow & \text{درغیر اینصورت} \end{cases}$$

مثال: اگر ماتریس های رابطه R و S و T به صورت زیر باشند:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 4}$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 4} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{4\times 3}$$

Scanned by CamScanner

الف) $R \vee S$ ؟
ب) $S \wedge T$ ؟
ج) $R \wedge S$ ؟
د) $R \odot T$ ؟

الف) $R \vee S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ب) ندارد

ج) $R \wedge S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

د) $R \odot_K T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

گراف یک رابطه (Graph of a Relation):

یک رابطه را می توان بصورت گراف نمایش داد و با استفاده از گراف می توان خواص رابطه را تشخیص داد. اگر مجموعه X متناهی باشد و رابطه A روی مجموعه X تعریف شده باشد برای تشکیل گراف آن ابتدا عضوهای مجموعه X را به وسیله دایره های کوچک به نام Node رسم می کنیم که به آن ها راس می گویند. درصورتی که $x_i R x_j$ در رابطه باشد آنگاه x_i را توسط خطی جهت دار به x_j وصل می کنیم به آن یال گویند.

و اگر x_i با خودش در رابطه باشد ($x_i R x_i$) در این صورت یک خط دایره ای جهت دار بصورت حلقه با شروع از x_i و ختم به x_i رسم می شود که به آن لوپ گویند.

درگراف یال ها متناظر با دوتایی های مرتب مجموعه ی رابطه ی R و راس ها متناظر با عناصر مجموعه X می باشند.

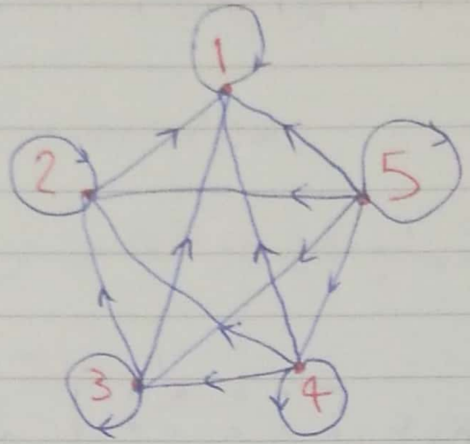
مثال) اگر مجموعه $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و رابطه ی $R = \{\langle x,y \rangle \mid x,y \in X, x^2+1 \geq y^2\}$ ($x_i R x_j$ باشد آنگاه)

$R = \{ \langle 1,1 \rangle \langle 2,1 \rangle \langle 2,2 \rangle \langle 3,1 \rangle \langle 3,2 \rangle \langle 3,3 \rangle \langle 4,1 \rangle \langle 4,2 \rangle \langle 4,3 \rangle \langle 4,4 \rangle \langle 5,1 \rangle \langle 5,2 \rangle \langle 5,3 \rangle \langle 5,4 \rangle \langle 5,5 \rangle \}$

شرح دهید ؟

NAHAL

Scanned by CamScanner

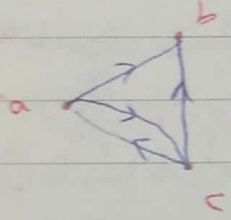


شناسایی خواص رابطه از گراف ها:

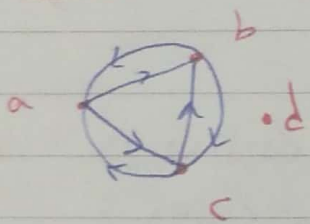
۱. اگر رابطه‌ای بازتابی باشد، آنگاه در گراف مربوط به آن در هر راس باید یک **لوپ** وجود داشته باشد.

نکته: حتی یکی از راس ها لوپ نداشته باشد آن رابطه بازتابی نیست.

۲. اگر گراف مربوط به رابطه آن در هیچ راسی لوپ موجود نباشد در این صورت آن رابطه دارای خاصیت غیربازتابی است.



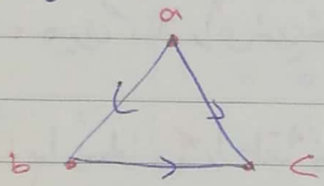
۳. اگر رابطه‌ای به گونه‌ای باشد که در گراف آن بین دو راس x و y خط جهت دار موجود باشد آنگاه از راس y به x نیز خط جهت داری وجود داشته باشد آنگاه رابطه دارای خاصیت **متقارن** است.



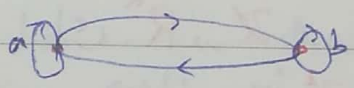
نکته: اگر حتی یکی از خطوط رفت، برگشت نداشته باشد متقارن نیست.

۴- اگر در گراف رابطه‌ی مربوط برای دو رأس متمایز x_i و x_j نتوان همزمان یک یال از x_i به x_j و یک یال از x_j به x_i پیدا کرد در این صورت رابطه مربوطه این گراف پادمتقارن خواهد بود.

۵- اگر در یک گراف برای سه رأس a و b و c داشته باشیم aRb و bRc و آنگاه aRc نیز برقرار باشد خاصیت تعدی در گراف موجود خواهد بود که از لحاظ گراف‌ها aRb و bRc به مفهوم این است که مسیری به طول ۲ یال از a به c موجود باشد. و اگر در ادامه برای aRc مسیری به طول ۱ یال از a به c موجود باشد در این صورت این معادل با متعدی بودن گراف است. و این اتفاق باید برای تمام مسیرهای به طول ۲ در گراف برقرار باشد تا بگوییم رابطه R مربوط به گراف دارای خاصیت تعدی است که در دو حالت زیر معرفی می‌شود:

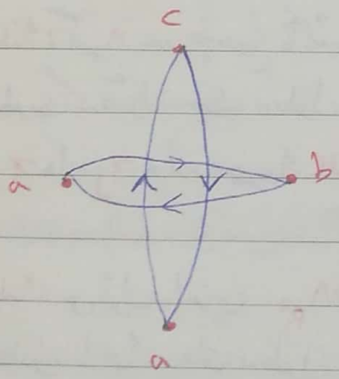


الف) حالت مثلثی



ب) حالت لوپ دار

مثال)

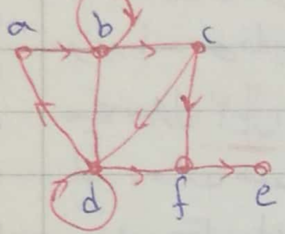


→ این نتیجه

مسیر در گراف های جهت دار: با فرض رابطه R در مجموعه X یک مسیر از a به b به طول n یک رشته متناهی است که از رأس a شروع شده و به رأس b که به یک ختم می شود و آن را اینگونه نمایش می دهند:

$\pi = a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$

این مسیر دارای زوج های به صورت aRx_1 ، x_1Rx_2 و x_2Rx_3 ... x_nRb می باشد که یک مسیر به طول n دارای $n+1$ عضو از X می باشد و طول مسیر با تعداد یال های آن تعریف می شود.



$\pi = c, d, a, b$ مسیر طول 3

$\pi = abcdfe$ مسیر به طول 5

نکته: مسیری که از رأسی شروع شده و به خودش خاتمه پیدا کند مدار نامیده می شود.

نکته: مدار به طول 1 را حلقه می نامیم.

این یک لیبله توان نیست

نکته: اگر n عدد صحیح و مثبت باشد در این صورت رابطه ی R^n در X به صورت $x_i R^n x_j$ تعریف می شود به طوری که هرگاه مسیری به طول n از x_i به x_j در X وجود داشته باشد. مثلاً R^2 نماینده مسیرهای به طول 2 یال از x_i ها به x_j ها در مجموعه X می باشد.

نکته: می توان ماتریس M_{R^2} را با استفاده از ضرب بولی به صورت زیر بدست آوریم که این ماتریس و درایه های آن معادل با همه مسیرهای به طول 2 یال می باشد که تشخیص آن با گراف زمان بیشتری طول می کشد و به راحتی می توان با استفاده از ضرب بولی دو ماتریس رابطه بدست آورد.

$$M_{R^2} = M_R \odot M_R$$

رابطه R^∞ در X اینگونه تعریف می شود که $x_i R^\infty x_j$ تمام مسیرهای با هر طول از x_i به x_j در X می باشد.

نکته: یک رابطه متعدی را می توان از روی ماتریس رابطه M_R تشخیص داد. اینگونه که درایه های موجود در ماتریس M_{R^2} در مکان های (i, j) که عدد 1 در آن جا درج شده است را مشخص می کنیم. اگر در ماتریس M_R در همان محل های (i, j) عدد 1 وجود داشته باشد در این صورت ماتریس $M_R \geq M_{R^2}$ خواهد بود و در نتیجه می توان گفت رابطه R دارای خاصیت متعدی می باشد.

Scanned by CamScanner

مثال: آیا رابطه مربوط به زوج های مرتب زیر دارای خاصیت تعدی می باشد؟

و (4,1) ‏ ‏ ‏ و (3,2)

$R = \{(1,1),(1,4),(4,4),(2,2),(2,3),(3,3),(5,5),(5,1),(2,5),(1,5)\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5\times5} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{5\times5}$$

$$\Rightarrow M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{5\times5}$$

اینجا یک اومده پس تعدی نیست

رابطه هم ارزی: رابطه R را روی مجموعه X یک رابطه هم ارزی گویند. هرگاه R دارای خواص بازتابی و تقارن و تعدی باشد. و در این صورت دامنه رابطه R برابر با مجموعه X خواهد بود.

عملیات بر روابط: الف) اجتماع دو رابطه: اگر R و S دو رابطه از A به B باشند برای اجتماع آن ها داریم:

$a(R \cup S)b \longleftrightarrow (aRb)$ یا (aSb)

در اجتماع دو رابطه عناصر درایه به درایه بررسی می شوند اگر یکی از آن ها 1 باشد در ماتریس اجتماع عدد 1 را می گذاریم. حتی اگر یکی از آن ها 1 نباشد در آن درایه اجتماع عدد 0 را می گذاریم.

Scanned by CamScanner

ب) اشتراک دو رابطه : اگر R و S دو رابطه از A به B باشد برای اشتراک آن ها داریم :

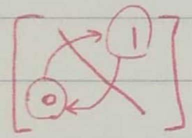
$$a(R\cap S)b \longleftrightarrow (aRb),(aSb)$$

و مفهوم آن این است که اگر در یک درایه از هر دو ماتریس R و S هر دو عدد یک باشد در ماتریس اشتراک ۱ می گذاریم
در غیر اینصورت ۰ می گذاریم .

ج) معکوس یک رابطه : اگر رابطه R موجود باشد به طوری که $(x,y)\in R$ باشد می توان معکوس آن را به صورت زیر تعریف کرد :

$$(y,x)\in R^{-1}$$

و مفهوم آن این است که در ماتریس رابطه هر جا عدد ۱ وجود داشته باشد آن را با درایه مقابلش نسبت به قطر اصلی جابجا می کنیم.



نکته: اگر R و S دو رابطه باشند معکوس اجتماع و اشتراک آن ها به صورت زیر تعریف می شود:

$$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1} \qquad (R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$$

د) متمم یک رابطه : اگر R ماتریس رابطه باشد به طوری که $R=[r_{ij}]_{m\times n}$ متمم آن $\bar{R}=[\bar{r}_{ij}]_{m\times n}$
به این صورت است که درایه های آن با دستور زیر تعیین می شود :

$$\bar{r}_{ij}=\begin{cases}1 & r_{ij}=0\\ 0 & r_{ij}=1\end{cases}$$

ترکیب روابط: اگر A و B و C سه مجموعه باشند و R رابطه‌ای از A به B باشد و S رابطه‌ای از B به C باشد، رابطه جدید از A به C را ترکیب R و S می‌نامند و آن را می‌توان به صورت $S \circ R$ معرفی کرد.

$$\left.\begin{array}{l} a \in A \\ c \in C \end{array}\right\} \longrightarrow a(S \circ R)c \Longleftrightarrow b \in B , \left\{\begin{array}{l} aRb \\ bSc \end{array}\right. \Longrightarrow a(S \circ R)c$$

باید یکی باشند در آنجا

مثال: فرض کنید R و S دو رابطه در مجموعه $A=\{1,2,3,4\}$ باشند و R و S به صورت زیر تعریف شده باشند

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(4,3),(4,2)\}$$

$$S = \{(1,1),(2,1),(3,2),(1,3)\}$$

مقادیر عبارات زیر را تعیین کنید؟

الف) $S \circ R$ ؟ ب) R^{-1} ؟ ج) $\bar{S}$ ؟ د) $S \cap R$ ؟

الف) $S \circ R = \{(1,1),(3,1),(2,1),(4,1),(2,2),(4,2),(1,3),(3,3)\}$

ب) $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ج) $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

د) $S \cap R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

نهال NAHAL

Scanned by CamScanner

نکته ۹: معکوس رابطه $S\circ R$ به صورت زیر معرفی می شود: $(S\circ R)^{-1} = R^{-1}\circ S^{-1}$

نکته ۱۰: اگر M_R و M_S ماتریس های 2 رابطه باشند می توان ماتریس ترکیب آن ها یعنی $S\circ R$ را به صورت $M_{S\circ R}$ نوشت و آن را با استفاده از ضرب بولی به صورت زیر بدست آورد:

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S$$

مثال: برای تمرین قبلی $M_{R\circ S}$ را تشکیل دهید؟

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \odot R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

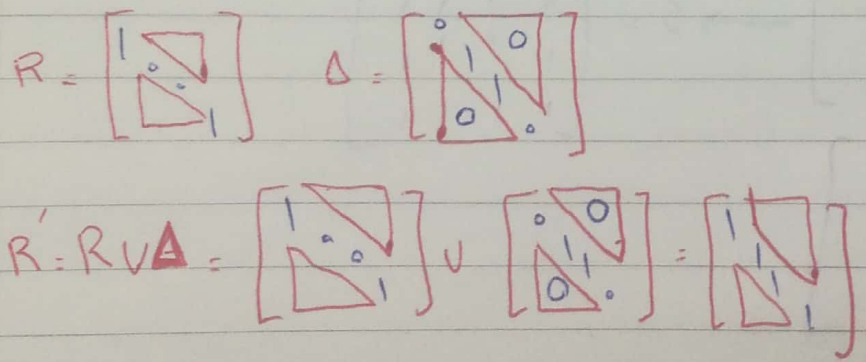
بستارها: اگر R یک رابطه در مجموعه A باشد ممکن است برخی از خصوصیات رابطه هم ارزی را مانند بازتابی، تقارنی یا تعدی را نداشته باشد. می توان با افزودن زوج هایی به رابطه R باعث شویم آن رابطه خصوصیات رابطه هم ارزی را کامل کند و به رابطه هم ارزی تبدیل شود به آن زوج های اضافه شده بستار گویند و می توان به 4 صورت معرفی کرد.

الف) بستار بازتابی: اگر R یک رابطه در مجموعه A باشد که بازتابی نباشد می توان برخی زوج ها را از رابطه ی Δ گرفت و به R اضافه کرد تا کوچک ترین رابطه بازتابی شامل رابطه R تشکیل شود که در اینجا Δ را بستار بازتابی گویند. و داریم:

رابطه جدید بازتابی شده $R = R \cup A$ ← بستار بازتابی

(R: رابطه اولیه غیر بازتابی)

مثال:



ب) بستار های متقارن: اگر رابطه R در مجموعه A تعریف شده باشد که متقارن نباشد یعنی زوجی به صورت xRy موجود باشد ولی yRx موجود نباشد بدیهی است که $(y,x)\in R^{-1}$ در نتیجه برای تبدیل رابطه R به یک رابطه متقارن باید زوج های R^{-1} را به آن اضافه کنیم و در نتیجه R^{-1} بستار متقارن برای رابطه R خواهد بود و داریم:

$$R' = R \cup R^{-1}$$

(R': رابطه جدید متقارن شده، R: رابطه اولیه غیر متقارن، R^{-1}: بستار متقارن)

مثال: اگر ماتریس رابطه R به صورت زیر باشد: رابطه متقارن شده جدید آن را تشکیل دهید؟

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ج) بستار متعدی: اگر رابطه R در مجموعه X بزرگ تعریف شده باشد که متعدی نباشد آنگاه بستار متعدی آن را به صورت R^{∞} تعریف می کنند. اگر مجموعه A دارای n عضو باشد می توان بستار متعدی را به صورت زیر نوشت:

$$R^{\infty} = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots \cup R^n$$

برای محاسبه ی R^{∞} روش های متفاوتی از جمله گراف جهت دار و روش ماتریس وجود دارد که در مرتبه های بزرگ ماتریس کارایی ندارد و الگوریتم وارشال روش مناسبی برای محاسبه R^{∞} است.

الگوریتم وارشال: فرض کنید مجموعه $A=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ و رابطه R در آن تعریف شده باشد. اگر $x_1,x_2,\dots,x_m$ مسیرهایی در R باشند برای $1\leq k\leq n$ ماتریس بولی W_k بدین صورت تعریف می شود که ابتدا $M_R = W_0$ انتخاب می کنیم سپس برای ساخت هر W_k به W_{k-1} توجه می کنیم. فرض می کنیم در مکان های $p_1, p_2, \dots$ در ستون k ام ماتریس W_{k-1} عدد 1 درج شده باشد و همچنین در مکان های $q_1, q_2, \dots$ در سطر k ام همان ماتریس W_{k-1} عدد 1 درج شده باشد اینها را یادداشت کرده و با این ها زوج های مرتب (p_i, q_j) می سازیم و در این مکان ها از ماتریس W_k عدد 1 را قرار می دهیم و باقی درایه ها را از W_{k-1} به W_k انتقال می دهیم که اینگونه W_k ساخته می شود.

Scanned by CamScanner

این عملیات از W_0 شروع شده و با ساختن W_k ها تا رسیدن به W_n که n تعداد اعضای مجموعه A است ادامه می‌یابد و در نهایت ماتریس متعدی برابر خواهد بود با $M_{R^\infty} = W_n$

مثال: با استفاده از الگوریتم وارشال ماتریس متعدی رابطه زیر را بدست آورید؟

$$M_R = W_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} p_1, p_4 \\ q_1, q_3 \end{cases} \Longrightarrow (1,1)(1,3)(4,1),(4,3)$$

اگر 1 نبود طبق آدرس های داده شده دایره می کشیم و در ماتریس بعدی 1 می کنیم

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} p_2, p_4, p_5 \\ q_2 \end{cases} \quad (2,2),(4,2),(5,2)$$

$$W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} p_1, p_4 \\ q_4 \end{cases} \quad (1,4),(4,4)$$

$$W_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} p_1, p_3, p_4 \\ q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 \end{cases}$$

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} p_1, p_3, p_4, p_5 \\ q_2, q_5 \end{cases}$$

$(1,2)(1,5)(3,2)$
$(3,5)(4,2)(4,5)$
$(5,2)(5,5)$

$$W_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W_5 = (M_R)^\infty$$

Scanned by CamScanner

تضمینه: اگر R و S دو رابطه هم ارزی در مجموعه A باشند در این صورت کوچک ترین رابطه هم ارزی شامل R و S رابطه‌ی $(R \cup S)^{\infty}$ می باشد.

مثال: کوچک ترین رابطه هم ارزی مربوط به دو ماتریس رابطه‌ی زیر را بدست آورید؟

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

فصل سوم

توابع نگاشت (تبدیل): اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، تابع f از A به B به صورت $f: A \to B$ نمایش داده می شود که رابطه ای از A به B می باشد به طوری که به ازای هر $a \in D_f$، $f(a)$ فقط شامل یک عضو از B باشد که مجموعه ی A را دامنه ی D_f و مجموعه B را برد R_f گویند. رابطه ی f را می توان به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب به شکل زیر نوشت:

$$R_f = \{(a, f(a)) \mid a \in D_f\}$$

باید هم پوشانی و یک به یک و توابع ویژه و توابع وارون بنویسیم

اصل لانه کبوتر:

فرض کنیم $f: A \to B$ تابعی با دامنه D_f و برد R_f باشد. اگر $R_f < D_f$ باشد آنگاه باید دو عضو متمایز a_1 و a_2 از D_f موجود باشد به طوری که $f(a_1) = f(a_2)$ باشد که در اصطلاح عناصر D_f را به n کبوتر و عناصر R_f را به m لانه کبوتر [تعبیر] می کنند. اگر f تابعی باشد که هر کبوتر را به یک لانه کبوتر متصل کند و m کوچکتر از n باشد آنگاه دست کم یک مربوط

لانه کبوتر شامل دو کبوتر یا بیشتر خواهد بود.

مثال: نشان دهید اگر 5 عدد از میان اعداد 1 تا 8 انتخاب شوند جمع دوتا از آن ها برابر 9 خواهد بود؟

اثبات: اعداد 1 تا 8 را در چهار دسته ی مجزا به صورت لانه کبوتر دسته بندی می کنیم.

(1,8)
(2,7)
(3,6)
(4,5)

اگر 4 عدد انتخاب کنیم، قطعاً در یکی از دسته های روبه رو خواهد بود: (از 1 تا 8)

اگر عدد پنجم را انتخاب کنیم (مثلاً 6) حتماً دسته ای موجود خواهد بود که جمع اعداد برابر 9 است. بنا به اصل لانه کبوتر دست کم دوتا از این اعداد انتخاب شده به یک دسته مربوط خواهند شد که مجموع اعضای آن 9 است.

Scanned by CamScanner

تعمیم اصل لانه کبوتر: اگر m لانه وجود داشته باشد ولی تعداد کبوتران بیش از $2m$ باشد در این صورت 3 کبوتر و یا بیشتر باید به یکی از لانه‌ها مربوط باشد. به بیان دیگر اگر n کبوتر را به m لانه منصوب کنیم، یکی از لانه‌ها دست کم باید شامل $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ کبوتر باشد.

$\lceil \frac{n}{m} \rceil$ ⟵ این تهش داره

مثال: اگر 150 نفر به طور تصادفی انتخاب شوند حداقل چند نفر از این افراد می‌توان گفت که روز تولدشان در یک روز هفته باشد؟

روزهای هفته، 7 لانه کبوتر و 150 نفر، 150 کبوتر هستند که می‌خوان برن خونشون.

$$\lceil \frac{150}{7} \rceil = \lceil 21.4 \rceil = 22$$

اصل لانه کبوتر دیریکله: اگر $n+1$ کبوتر یا بیشتر n لانه کبوتر را اشغال کنند آنگاه حداقل یکی از لانه‌ها بیش از 1 کبوتر خواهد بود. پس به طور کلی اگر $kn+1$ کبوتر و یا بیشتر n لانه را اشغال کنند آنگاه حداقل یکی از لانه‌ها بیش از k کبوتر خواهد داشت.

مثال: کیسه‌ای حاوی 5 مهره قرمز، 8 آبی، 10 سفید، 12 سبز و 7 زرد. مطلوب است تعیین کمترین مهره‌هایی که باید انتخاب شوند تا مطمئن شویم،

الف) حداقل 5 مهره همرنگ هستند؟

ب) حداقل 8 مهره همرنگ هستند؟

ج) حداقل 10 مهره همرنگ هستند؟

الف)

به ازای لانه کبوترها (تعداد رنگ‌ها) داریم ⟸ $n=5$ ⟸ $k=4$ ⟸ $4 \times 5 + 1 = 21$

ب) $7 \times 5 + 1 = 36 - 2 = 34$

نکتش اینه که نباید از تعداد رنگ‌ها بیشتر باشه. پس بجای 6 میشه 5

ج) $9 \times 5 \overset{+1}{\vee} - 7 = 39$

قضیه ۴: اگر n کبوتر را به m لانه کبوتر تخصیص دهیم، آنگاه حداقل یکی از لانه ها بیش از k کبوتر خواهد داشت که در آن k عبارت است از مقدار گرد شده $\left[\frac{n-1}{m}\right]$

قضیه ۴: اگر n کبوتر را به صورت $n = P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_m - m + 1$ بین m لانه کبوتر پخش کنیم آنگاه لانه‌ی نخست حداقل P_1 کبوتر یا لانه‌ی دوم حداقل P_2 کبوتر و یا لانه mام حداقل P_m کبوتر خواهند داشت.

مثال: کیسه ای 6 مهره قرمز، 5 سفید و 7 آبی دارد. مطلوب است تعیین کمترین تعداد مهره هایی که باید انتخاب شوند تا مطمئن شویم حداقل 3 مهره قرمز یا حداقل 4 مهره سفید یا حداقل 5 مهره آبی انتخاب شده باشد؟

P ها نماینده حداقل هاست.

$P_1 = 3 \quad P_2 = 4 \quad P_3 = 5$

$m = 3$

$n = 3 + 4 + 5 - 3 + 1 = 10$

فصل چهارم

مجموعه های مرتب : رابطه R در مجموعه A را ترتیب جزئی گویم هرگاه بازتابی ، پادتقارنی و متعدی باشند. در مجموعه A، R را همراه ترتیب جزئی رابطه R به صورت مجموعه مرتب جزئی (A,R) می نویسیم.

مجموعه های $(\mathbb{R}, \leq)$ $(\mathbb{N}, |)$ $(P(A), \subseteq)$ هر سه دارای خاصیت های بازتابی، پادتقارنی و متعدی هستند پس مجموعه های مرتب جزئی هستند.

مثال : اگر A بدین صورت و رابطه R در مجموعه A دارای اعضای زیر باشند: $A=\{1,2,3,4,5\}$

$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(5,1),(1,3),(5,3),(2,3),(3,4),(2,4)\}$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بازتابی دارد.

آیا مجموعه مرتب جزئی است؟

اگر عدد 1 در ماتریس غیر از قطر اصلی وجود داشته باشد و طرف مقابل آن هم 0 باشد پس پادتقارنی دارد. در اینجا پادتقارنی هم دارد.

$$\odot = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

باید حساب کسی خودمون تعریف کنیم

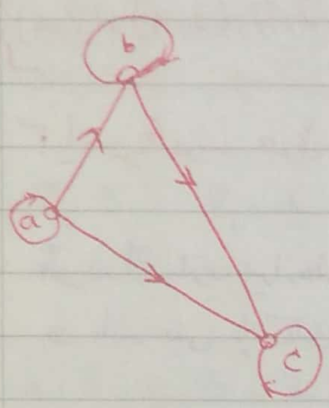
Scanned by CamScanner

مطلق توان است

دوگان: اگر R یک ترتیب جزئی در مجموعه A باشد و R^{-1} وارون R باشد در این صورت R^{-1} نیز بازتابی و پاد تقارنی و متعدی خواهد بود پس ترتیب جزئی است که ترتیب جزئی R^{-1} را دوگان آن گویند و مجموعه مرتب جزئی (A, R^{-1}) را دوگان (A, R) گویند.

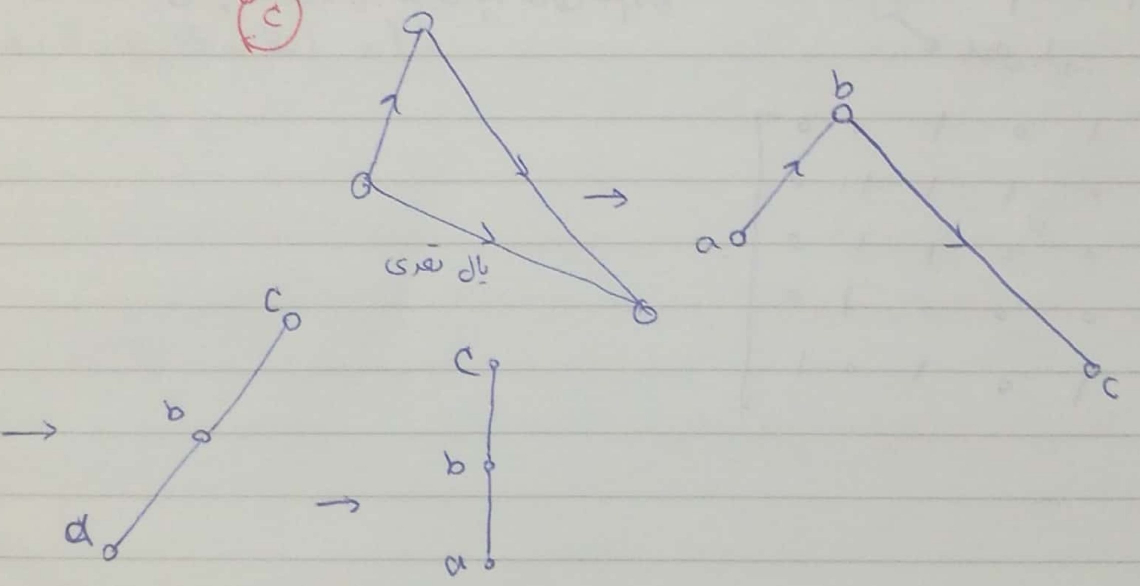
هاس: با توجه به این که گراف جهت دار یک ترتیب جزئی در مجموعه A دارای دوری به طول بیش از 1 یال نیست اگر همه لوپ‌ها را از رأس های گراف حذف کنیم و همچنین همه‌ی یال های ناشی از رابطه تعدی را حذف کنیم، و طبق قرارداد جهت یال های گراف جهت دار یک ترتیب جزئی به طرف بالا باشد در نتیجه جهت یال ها هم حذف شود چنین نمایشی از یک ترتیب جزئی را نمودار هاس ترتیب جزئی گویند.

مثال:



این شکل هر ۳ شرط را دارد پس ترتیب جزئی است.

هاس:



Scanned by CamScanner

~~قضیه 2: اگر تابع $f:B_n \to B$~~

قضیه 3: اگر تابع $f:B_n \to B$ برای $S(f)$ چند عضوی شامل $b_i \in B_n$ می‌توان تابع بولی f را به صورت زیر ایجاد کرد که در آن هر کدام از f_i ها مربوط به یک b_i می‌باشد.

$$f = f_1 \vee f_2 \vee f_3 \dots \vee f_k$$

که طبق قضیه 2 هر کدام از f_i ها را از E_{b_i} معرفی شده ایجاد می‌کنیم.

مثال) برای تابع بولی $f:B_3 \to B$ چند جمله‌ای بولی معادل را تشکیل دهید؟

x	y	z	$f(x,y,z)$	
1	1	1	0	
1	1	0	0	
1	0	1	1	$\to x \wedge y' \wedge z$
1	0	0	1	$\to x \wedge y' \wedge z'$
0	1	1	0	
0	1	0	0	
0	0	1	1	$\to x' \wedge y' \wedge z$
0	0	0	1	$\to x' \wedge y' \wedge z'$

S(f) ان

$$f(x,y,z) = (x \wedge y' \wedge z) \vee (x \wedge y' \wedge z') \vee (x' \wedge y' \wedge z) \vee (x' \wedge y' \wedge z')$$

با استفاده از خواص 7 گانه جبر بول این تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x,y,z) = \big((x \wedge y') \wedge \underbrace{(z \vee z')}_{I}\big) \vee \big((x' \wedge y') \wedge \underbrace{(z \vee z')}_{I}\big)$$

$$= \big((x \wedge y') \wedge I\big) \vee \big((x' \wedge y') \wedge I\big) = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y') = y' \wedge (x \vee x') = y' \wedge I = y'$$

NAHAL

Scanned by CamScanner

نکته: ترتیب جزئی رابطه بخش پذیری در مجموعه A به این صورت است که هرگاه $a, b \in A$

و $a \preccurlyeq b$ باشد اگر و تنها اگر $a|b$ (مثلاً $4|20$ یعنی 20 بر 4 بخش پذیر است).

مثال: نمودار هاس را برای رابطه بخش پذیری $(A, |)$ در مجموعه $A=\{1,2,3,4,12\}$ تشکیل دهید؟

لوپ های که توی گراف حذف کردیم.

ابتدا زوج های مرتب مربوط به ترتیب جزئی را می سازیم.

$1|1, 1|2, 1|3, 1|4, 1|12$

$2|2, 2|4, 2|12$

$3|3, 3|12$

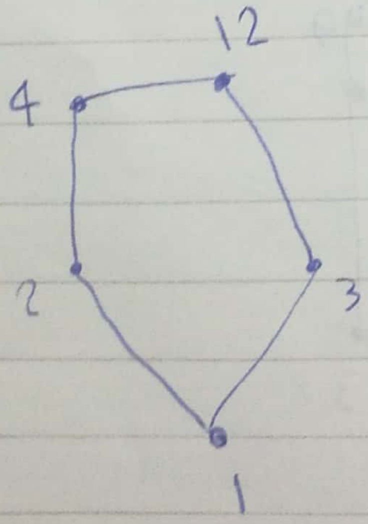
$4|4, 4|12$

$12|12$

این 5 تا در نهایت باقی می مانند.

$a|b, a|b \rightarrow a|c$ مرحله بعدی اینا حذف می کنیم

⇓



/ /

مثال : برای ترتیب جزئی $(D_{18}, |)$ هاس را تشکیل دهید؟

$D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$

$1|1,\ 1|2,\ 1|3,\ 1|6,\ 1|9,\ 1|18$

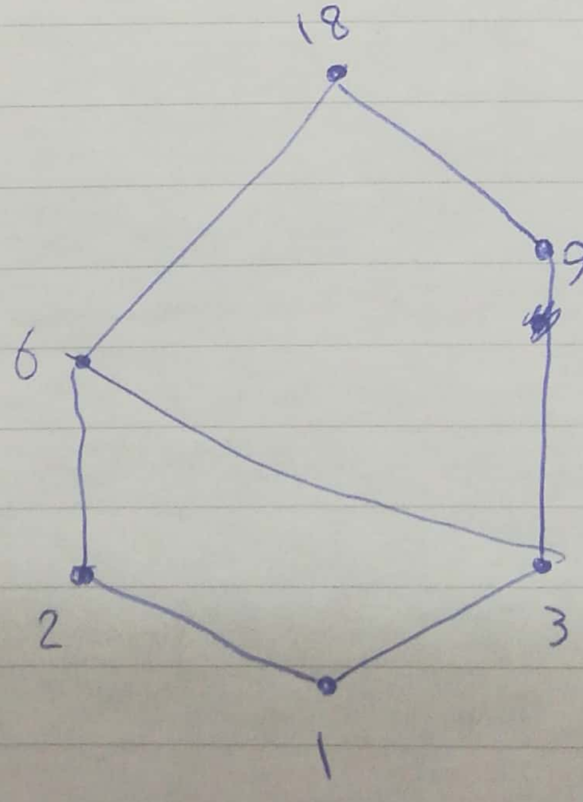
$2|2,\ 2|6,\ 2|18$

$3|3,\ 3|6,\ 3|9,\ 3|18$

$6|6,\ 6|18$

$9|9,\ 9|18$

$18|18$



Scanned by CamScanner

مثال: ترتیب جزئی با رابطه $(D_{24}, |)$ موجودات. هاس را تشکیل دهید؟

Scanned by CamScanner

مثال : نمودار هاس را برای ترتیب جزئی $(D_{120}, |)$ تشکیل دهید؟

Scanned by CamScanner

عضو ماکسیمال: فرض کنیم $(A, \leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد. عضو $a \in A$ را یک عنصر ماکسیمال A گویند اگر برای هیچ عضو $c \in A$ رابطه ی $a < c$ برقرار نباشد.

عضو مینیمال: فرض کنیم $(A, \leq)$ یک ترتیب جزئی باشد. عضو $a \in A$ را مینیمال A گویند اگر برای هیچ عضو $c \in A$ رابطه ی $c < a$ برقرار نباشد.

قضیه: اگر a عضو ماکسیمال $(A, \leq)$ باشد در این صورت همان a عضو مینیمال دوگان آن یعنی $(A, \geq)$ خواهد بود و بالعکس.

قضیه: اگر A مجموعه متناهی باشد و $(A, \leq)$ یک مجموعه با ترتیب جزئی باشد در این صورت A حداقل دارای یک عضو ماکسیمال و یک عضو مینیمال خواهد بود.

Scanned by CamScanner

/ /

عضو ماکسیمم: در مجموعه A عضو $a \in A$ را ماکسیمم مجموعه A گویند هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \leqslant a$.

عضو مینیمم: در مجموعه A عضو $a \in A$ را مینیمم مجموعه A گویند هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $a \leqslant x$.

قضیه: اگر $(A, \leqslant)$ ترتیب جزئی باشد آنگاه مینیمم و ماکسیمم در صورت وجود منحصر بفرد هستند.

قضیه: یک مجموعه با ترتیب جزئی حداکثر دارای یک ماکسیمم و یک مینیمم است.

Greatest Lower Bound (GLB): بزرگ‌ترین کران پایین با فرض $(A, \leqslant)$ یک ترتیب جزئی باشد و $B \subseteq A$ باشد، $c \in A$ را بزرگ‌ترین کران پایین مجموعه B در A گویند و هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} (i)\ \forall b \in B : c \leqslant b \\ (ii)\ (c' \in A, \forall b \in B : c' \leqslant b) \rightarrow c' \leqslant c \end{cases}$$

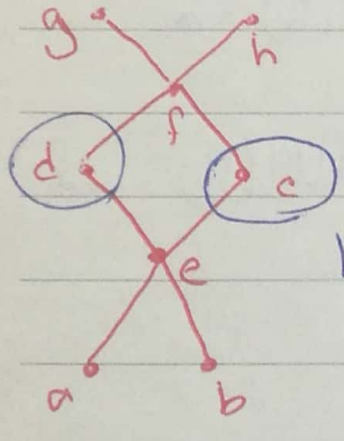
Scanned by CamScanner

Least upper Bound (LUB): با فرض $(A, \leq)$ یک ترتیب جزئی باشد

و $B \subseteq A$ آنگاه عضو $d \in A$ را کوچکترین کران بالای مجموعه‌ی B در A گویند. هرگاه داشته باشیم:

$$\begin{cases} (i) & \forall b \in B : b \leq d \\ (ii) & (d' \in A, \forall b \in B : b \leq d') \rightarrow \boxed{d \leq d'} \end{cases}$$

مثال: GLB و LUB را برای مجموعه $B = \{c, d\}$ در ترتیب جزئی زیر با هاس داده شده بیابید؟



GLB کران‌های پایین $\{a, b, e\} \xrightarrow{max} GLB(B) = e$

LUB: کران‌های بالا $\{f, g, h\} \xrightarrow{min} LUB(B) = f$

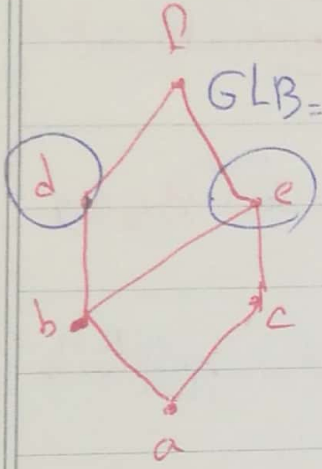
مثال: در نمودار قبلی برای مجموعه $S = \{e, c\}$ ، GLB و LUB را تعیین کنید؟

$GLB = \{a, b, e\} \xrightarrow{max} GLB(B) = e$

$LUB = \{c, f, g, h\} \xrightarrow{min} LUB(B) = c$

Scanned by CamScanner

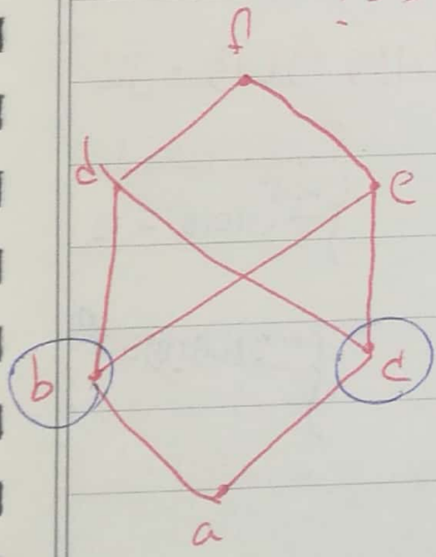
مثال: GLB و LUB را در نمودار هاسی زیر برای e و d بدست آورید؟



$GLB = \{a, b\} \xrightarrow{max} GLB(B) = b$

$LUB = \{f\} \xrightarrow{min} LUB(B) = f$

مثال: $T = \{b, c\}$



$GLB = \{a\} \xrightarrow{max} GLB(B) = a$

$LUB = \{d, e, f\} \xrightarrow{min} LUB(B) =$ ندارد

Scanned by CamScanner

فصل پنجم

روابط

بازگشتی: یک دنباله را می‌توان با نوشتن یک فرمول برای جمله nام تعریف کرد. همچنین می‌توان از مفاهیم بازگشتی برای تعریف دنباله استفاده کرد. در این روش یک معادله به نام رابطه‌ی بازگشتی ارائه می‌شود که توسط آن جمله nام دنباله به چند جمله دیگر بالایی و یا پایینی مرتبط می‌شود و مقادیر چند جمله‌ی اول از دنباله به صورت شرایط مرزی داده می‌شود.

یک رابطه‌ی بازگشتی مربوط به یک دنباله می‌باشد پس حل آن به معنی ایجاد جمله عمومی دنباله می‌باشد.

روابط بازگشتی خطی: یک رابطه بازگشتی خطی به صورت زیر است:

$$\alpha_0 a_n + \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k} = f(n)$$

که در این جا ضرایب آلفا همگی عدد هستند و جملات a_n مربوط به دنباله می‌باشند. اگر $f(n)=0$ باشد رابطه‌ی بازگشتی خطی همگن است و در غیر اینصورت رابطه بازگشتی خطی غیرهمگن است.

$$\rightarrow \begin{cases} f(n)=0 & \text{خطی همگن} \\ f(n)\neq 0 & \text{خطی ناهمگن} \end{cases}$$

حل روابط بازگشتی خطی همگن:

برای حل روابط بازگشتی خطی همگن پاسخ عددی اولیه را به صورت $a_n = kq^n$ در روابط بازگشتی قرار داده و معادله مشخصه آن را می‌یابیم که به صورت زیر خواهد بود:

$$\alpha_0 q^k + \alpha_1 q^{k-1} + \dots + \alpha_k = 0$$

ریشه های این معادله مشخصه را باید بدست آوریم که در 3 حالت می‌توان بررسی کرد:

الف) اگر در معادله درجه دو بدست آمده $\Delta > 0$ باشد ریشه‌ها متمایز خواهند بود به صورت q_1 و q_2 در نتیجه جواب عمومی را به شکل زیر خواهیم نوشت که در آن پارامترهای c_1 و c_2 و ... را با استفاده از شرایط مقادیر اولیه می‌توان تعیین کرد:

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots$$

ب) حالت ریشه‌های مضاعف که در آن معادله درجه ۲ بدست آمده دارای $\Delta=0$ است. در نتیجه فقط یک ریشه q خواهیم داشت. در نتیجه جمله عمومی دنباله به صورت زیر معرفی می شود:

$$a_n = c_1 q^n + c_2 n q^n + c_3 n^2 q^n + \cdots$$

که در این جا هم ضرایب ... و c_1, c_2 با استفاده از شرایط مقادیر اولیه تعیین می شوند

ج) حالت ریشه های موهومی: که در این حالت تابع درجه دوم بدست آمده از معادله مشخصه دارای دلتای منفی خواهد بود. در نتیجه ریشه ها موهومی خواهد بود که پاسخ عمومی دنباله به صورت

$$a_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \cdots$$

خواهد بود ولی لازم است q های بدست آمده به صورت $\begin{cases} q_1 = x+iy \\ q_2 = x-iy \end{cases}$ را به صورت قطبی تبدیل کنیم. که از الگوی زیر استفاده می کنیم:

$$q = x+iy \longrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{cases}$$

صورت قطبی $\longrightarrow q = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$q^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

مثال)

$$\begin{cases} a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0 \\ a_1 = -3,\ a_2 = 6 \end{cases}$$

پاسخ:

$$a_n = kq^n$$

$$kq^n - 6(kq^{n-1}) + 9(kq^{n-2}) = 0$$

$$q^{n-2}(q^2 + 6q + 9) = 0$$

$$q^2 - 6q + 9 = 0$$

Scanned by CamScanner

$q^2 - 6q + 9 = 0$ معادله مشخصه

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4 \times 1 \times 9 = 0$ ریشه مضاعف

$(q-3)^2 = 0 \longrightarrow \boxed{q = 3}$

در حالت دوم $a_n = c_1 q^n + c_2 n q^n$

$a_n = c_1 (3)^n + c_2 (n) 3^n$

حالا باید شرایط اولیه (مقادیر) را قرار دهیم تا c_1 و c_2 بدست آیند.

$$\begin{cases} a_1 = -3 \rightarrow c_1 (3)^1 + c_2 (1) 3^1 = -3 \\ a_2 = 6 \rightarrow c_1 (3)^2 + c_2 (2) 3^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3c_1 + 3c_2 = -3 \\ 9c_1 + 18c_2 = 6 \end{cases} \xrightarrow[\text{دو مجهول}]{\text{دستگاه دو معادله}} \begin{cases} c_1 = \frac{-8}{3} \\ c_2 = \frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{a_n = \frac{-8}{3} 3^n + \frac{5}{3} (n) 3^n}$$

مثال) رابطه بازگشتی خطی همگن را حل کنید؟

$$\begin{cases} a_n + 3a_{n-1} + 2a_{n-2} = 0 \\ a_0 = -1 , a_1 = 3 \end{cases}$$

$a_n = kq^n$ پاسخ عمومی

$kq^n + 3kq^{n-1} + 2kq^{n-2} = 0$

$q^n + 3q^{n-1} + 2q^{n-2} = 0$

$q^{n-2} (q^2 + 3q + 2) = 0$

$q^2 + 3q + 2 = 0$ معادله مشخصه

NAHAL
Scanned by CamScanner

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$

$q = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} \longrightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{-3-1}{2} = -2 \\ q_2 = \frac{-3+1}{2} = -1 \end{cases}$ دو ریشه متمایز

$\begin{cases} a_0 = -1 \longrightarrow c_1(-1)^0 + c_2(-2)^0 = -1 \\ a_1 = 3 \longrightarrow c_1(-1)^1 + c_2(-2)^1 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \longrightarrow \boxed{c_1 = 1} \\ -c_1 - 2c_2 = 3 \longrightarrow \boxed{c_2 = -2} \end{cases}$

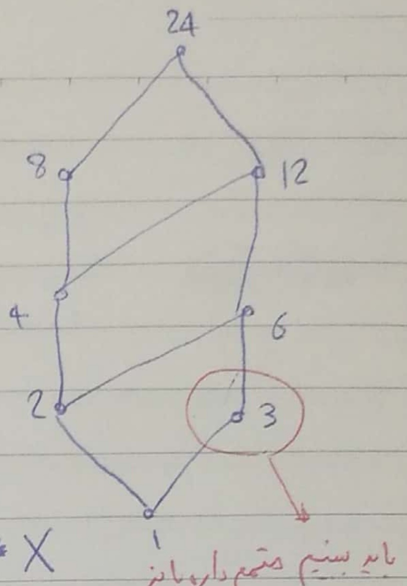
$a_n = 1 \times (-1)^n + (-2)(-2)^n$

$\boxed{a_n = (-1)^n + (-2)^{n+1}}$

Scanned by CamScanner

$(D_{24}, |)$

$\rightarrow D_{24}: \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$



$3,2 \rightarrow \begin{cases} 3 \wedge 2 = 1 \\ 3 \vee 2 = 6 \end{cases}$ ✗

$3,4 \rightarrow \begin{cases} 3 \wedge 4 = 1 \\ 3 \vee 4 = 12 \end{cases}$ ✗

$3,8 \rightarrow \begin{cases} 3 \wedge 8 = 1 \\ 3 \vee 8 = 24 \end{cases}$ ✓ → تکلیف این معلوم شد. باید بریم سراغ بقیه

$2,4 \rightarrow \begin{cases} 2 \wedge 4 = 2 \\ 2 \vee 4 = 4 \end{cases}$ ✗

$2,8 \rightarrow \begin{cases} 2 \wedge 8 = 2 \\ 2 \vee 8 = 8 \end{cases}$ ✗

نتیجه می‌گیریم ضرایب با همدیگر متمم نیستند.

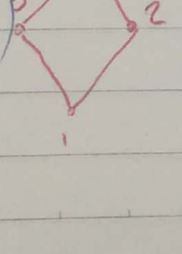
الان اینجا 2 دیگه نداره بیخیالش می شیم. اما چون 3 نمونه داشت رفتیم سراغ عدد بعدی. درنتیجه این مشبکه متمم دار نیست.

نتیجه: اگر مشبکه ای توزیع پذیر باشد آنگاه متمم یک عضو در صورت وجود یکتا است ودر نتیجه اگر متمم یک عضو یکتا نباشد قطعاً مشبکه توزیع پذیر نیست.

جبر بول: هر مشبکه توزیع پذیر متمم دار یک جبر بول است. به عنوان مثال $(P(A), \subseteq)$ یک جبر بول می باشد چرا که هم توزیع پذیر است وهم متمم.

مثال: کدام یک از مشبکه های زیر یک جبر بول است؟

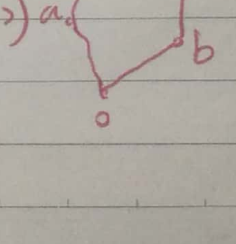
الف)



ب) $(D_{15}, |)$

ج) $(D_{24}, |)$

د)



Scanned by CamScanner

الف) $\xrightarrow{\text{بررسی متمم داری}}$ $2,5 \rightarrow \begin{cases} 2\wedge 5 = 1 \\ 2 \vee 5 = 10 \end{cases}$ ✓ $1,10 \rightarrow \begin{cases} 1\wedge 10 = 1 \\ 1 \vee 10 = 10 \end{cases}$ ✓

متمم دارات.

$\xrightarrow{\text{بررسی توزیع پذیری}}$ $5,1,2 \begin{cases} i) \quad 5\wedge(1\vee 2) = (5\wedge 1)\vee(5\wedge 2) \\ ii) \quad 5\vee(1\wedge 2) = (5\vee 1)\wedge(5\vee 2) \end{cases}$ توزیع پذیر است.

ب) $(D_{15}, |) \rightarrow \{1, 3, 5, 15\}$ ⟸ . این هم مثل بالاییه این جبر بولیه وقت نیست اثبات نکردیم.

ج) ⟵ . قبلاً اثبات کردیم که متمم نیست پس جبر بولی هم نیست.

د) توزیع پذیر نیست پس جبر بولی نیست.

کدهای n رقمی: ساختار ترتیبی متشکل از 0 و 1 به صورت رشته های عددی و کدهای n رقمی را می توان با استفاده از دستور زیر معرفی کرد که این رشته ها را به صورت B_n نمایش می دهند. $B_n = \{b_1 b_2 b_3 \dots b_n \mid \forall_i : b_i \in \{0, 1\}\}$

مثال:

$B_1 = \{0, 1\}$

$B_2 = \{00, 01, 10, 11\}$

$B_3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

⋮

B_n = تعداد عضوهای هر رشته $\rightarrow 2^n$

رابطه $\preccurlyeq'$: در دو رشته اعداد ۰ و ۱ به صورت B_n برای بررسی رابطه $\preccurlyeq'$ روی رشته ها از مقایسه عدد جایگاه اول رشته اول با جایگاه اول رشته دوم شروع می کنیم و تا انتهای رشته پیش می رویم تا درستی رابطه بدست آید.

$$b_1 b_2 \dots b_n \preccurlyeq' b'_1 b'_2 \dots b'_n \Longleftrightarrow \forall i \;\; b_i \preccurlyeq b'_i$$

مثال:

$100 \preccurlyeq' 101$ ✓

$101 \preccurlyeq' 110$ ✗ ← از لحاظ رشته ای مقایسه نمی شوند

قضیه: مجموعه $(B_n, \preccurlyeq')$ مجموعه ای مرتب جزئی است یعنی دارای خواص بازتابی، پادتقارنی و تعدی می باشد.

قضیه: مجموعه مرتب جزئی $(B_n, \preccurlyeq')$ یک مشبکه توزیع پذیر و متمم دار است، در نتیجه یک جبر بول است.

قضیه: محاسبات روی جبر بول $(B_n, \preccurlyeq')$ برای GLB و LUB و متمم رشته اعداد B_n به صورت زیر است:

i) GLB : $b_1 b_2 \dots b_n \wedge b'_1 b'_2 \dots b'_n = (b_1 \wedge b'_1)(b_2 \wedge b'_2) \dots (b_n \wedge b'_n)$

ii) LUB : $b_1 b_2 \dots b_n \vee b'_1 b'_2 \dots b'_n = (b_1 \vee b'_1)(b_2 \vee b'_2) \dots (b_n \vee b'_n)$

iii) متمم ← $b_1 b_2 b_3 \dots b_n = \bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 \dots \bar{b}_n$

مثال) بین رشته های اعداد زیر GLB و LUB را تعیین کنید؟

GLB: $101 \wedge 011 = 001$

LUB: $101 \vee 110 = 111$

Scanned by CamScanner

توابع بولی: هر تابع به صورت $f: B_n \to B$ را یک تابع بولی گویند که دامنه‌ی آن رشته اعداد B_n و برد آن مجموعه $B=\{0,1\}$ باشد.

مثال: $f(x_1,x_2,x_3) = \bar{x}_1 \vee (x_2 \wedge x_3)$ $\quad$ $f(x_1,x_2) = x_1 \wedge \bar{x}_2$

در این مثال x_i ها متغیرهای بولی هستند که می‌توانند مقادیر ۰ و ۱ را بگیرند.

جدول مقادیر یک چندجمله ای بولی: جدول مقادیری ترسیم کرده و برای متغیرهای مختلف بولی تمام حالات ۰ و ۱ را لحاظ کنیم و آن‌ها را در چندجمله‌ای قرار داده و با استفاده از محاسبات روی B_n حاصل چندجمله‌ای را می‌نویسیم.

مثال) جدول مقادیر چندجمله ای بولی زیر را تشکیل دهید؟ $P(x_1,x_2) = (x_2 \wedge \bar{x}_1) \vee (x_1 \wedge 1)$

چون دو متغیر داریم پس $4 = 2^2$ حالت داریم.

x_1	x_2	$P(x_1,x_2)$
0	0	$(0 \wedge \bar{0}) \vee (0 \wedge 1) = 0 \vee 0 = 0$
0	1	$(1 \wedge \bar{0}) \vee (0 \wedge 1) = 1 \vee 0 = 1$
1	0	$(0 \wedge \bar{1}) \vee (1 \wedge 1) = 0 \vee 1 = 1$
1	1	$(1 \wedge \bar{1}) \vee (1 \wedge 1) = 0 \vee 1 = 1$

مجموعه‌ی مشخصه‌ی یک تابع بولی: اگر f یک تابع بولی روی B_n باشد مجموعه مشخصه‌ی آن را با $S(f)$ نمایش می‌دهند و بصورت زیر تعیین می‌شود:

به عنوان مثال، چندجمله ای مثال قبلی مجموعه مشخصه برابر است با $S(f) = \{01, 10, 11\}$

مثال: مجموعه صدق تابع بولی زیر را تعیین کنید؟

$$f(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (y \wedge \bar{z})$$

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

3 متغیر داریم پس $2^3 = 8$ حالت داریم

خودمون باید بنویسیم ...

قضیه ۴: اگر $S(f)$ چند عضوی باشد و فرض کنیم f_1, f_2, f توابع بولی روی B_n باشند در این صورت داریم:

i) اگر $S(f) = S(f_1), S(f_2) \xrightarrow{\text{آنگاه}} f = f_1 \wedge f_2$

ii) اگر $S(f) = S(f_1) \cup S(f_2) \xrightarrow{\text{آنگاه}} f_1 = f_1 \vee f_2$

قضیه ۵: اگر $f: B_n \to B$ موجود باشد و $S(f)$ شامل عضو $b \in B_n$ باشد می‌توان برای b یک عبارت بولی متشکل از and و OR و NOT تشکیل داد به صورت $E_b = \bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \bar{x}_3 \dots \wedge \bar{x}_k$ که E_b معرف تابع f اولیه است.

(بین متغیرهای بولی)

Scanned by CamScanner

و همان عبارت $\bar{x}_k$ را لیترال گویند که آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{x}_k = \begin{cases} x_k & b_k = 1 \\ \bar{x}_k & b_k = 0 \end{cases} \quad 1 \leqslant k \leqslant n$$

Scanned by CamScanner